Devoir sur Table 3

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vos résultats en les encadrant.
8. Conformément au règlement de la Banque PT
 - Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
 - L'usage de liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Le soin apporté à la copie fera l'objet d'une évaluation suivant les critères suivants :

- Mise en évidence des résultats
- Soin et lisibilité de la copie. En particulier les traits, y compris pour les ratures, devront être tracés à l'aide d'une règle
- Respect des consignes concernant le liquide de correction et le dérouleur de ruban correcteur
- Respect de la grammaire et de l'orthographe

Problème

(Banque PT, Maths C 2011)

Preliminaire

Soit n_0 un entier naturel non nul, et f une fonction continue à valeurs positives, décroissante sur $[n_0, +\infty[$.

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel $k \geq n_0 + 1$:

$$\int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$$

(on accompagnera la réponse d'une illustration graphique sur le papier millimétré joint)

- (b) En déduire que, pour tout entier $n \geq n_0 + 1$:

$$\int_{n_0+1}^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=n_0+1}^n f(k) \leq \int_{n_0}^n f(t) dt$$

- (c) Comparer la convergence de la série $\left(\sum_{n \geq n_0} f(n) \right)$ et de l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt$.

Partie I

2. On rappelle que e désigne la base du logarithme népérien ($\ln(e) = 1$).

Pour $t \geq e$, on considère la fonction f définie par : $f(t) = \frac{1}{t(\ln(t))^2}$.

- (a) Après avoir justifié la dérivabilité de f sur $[e, +\infty[$, donner la valeur de $f'(t)$.
 (b) Étudier les variations de f sur $[e, +\infty[$.
 (c) Donner l'allure de la courbe représentative de f sur $[e, +\infty[$ sur le papier millimétré joint.
 (d) Déterminer une primitive de f sur $[e, +\infty[$.

Que peut-on en déduire pour la convergence de l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^2} dt$?

- (e) Que peut-on déduire du (d) pour la convergence de la série $\left(\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^2} \right)$?

3. Pour $t \geq e$, on considère la fonction g définie par : $g(t) = \frac{1}{t^2(\ln(t))^2}$.

- (a) Après avoir justifié la dérivabilité de g sur $[e, +\infty[$, donner la valeur de $g'(t)$.
 (b) Étudier les variations de g sur $[e, +\infty[$.
 (c) Donner l'allure de la courbe représentative de g sur $[e, +\infty[$.

- (d) L'intégrale $\int_e^{+\infty} g(t) dt$ est-elle convergente ?

- (e) Que peut-on déduire du (d) pour la convergence de la série $\left(\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2(\ln(n))^2} \right)$?

4. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$, définie par :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \sum_{p=1}^n \frac{\ln(p)}{p} - \frac{1}{2}(\ln(n))^2$$

- (a) Pour tout entier $n \geq 1$, calculer : $\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt$.

On admet, dans ce qui suit, que la fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ est décroissante sur $[e, +\infty[$.

- (b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

- (c) Montrer que, pour, tout entier $n \geq 3$: $u_n \geq \frac{\ln(2) - (\ln(3))^2}{2}$.

- (d) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge.

- (e) Montrer que, pour, tout entier $n \geq 1$: $\frac{u_n}{\ln(n)} + \frac{\ln(n)}{2} \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$, et conclure sur la convergence de la série de terme général $\frac{1}{n}$.

5. On considère la suite $(H_n)_{n \geq 1}$, définie par : $H_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$.

- (a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$.

- (b) Montrer que la suite $(H_n - \ln(n))_{n \geq 1}$ converge (on pourra étudier ses variations).

On notera ℓ sa limite.

- (c) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $\gamma_n = H_n - \ln(n)$.

Déterminer un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\gamma_{n+1} - \gamma_n$.

Que peut-on en déduire pour la convergence de la série $\left(\sum_{n \geq 1} (\gamma_{n+1} - \gamma_n) \right)$?

Montrer que l'on peut ainsi retrouver le résultat du (b).

- (d) Montrer que : $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(\frac{n}{n-1} \right) \right) = \ell - 1$.

- (e) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $\gamma_n - \ell = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln \left(\frac{k}{k-1} \right) - \frac{1}{k} \right)$.

(f) Soit ε un réel strictement positif.

Montrer qu'il existe un entier naturel non nul n_0 tel que, pour tout entier $k \geq n_0$:

$$\left| \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{k^2}.$$

(g) Montrer que, pour tout entier $n \geq n_0$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{k}{k-1}\right) - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)} \right) \right| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

(h) Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(H_n - \ln(n) - \ell - \frac{1}{2n} \right)$.

Partie II

Soit h et β deux réels, avec $h > 0$.

6. Déterminer la limite de $\frac{1}{t^h(\ln(t))^\beta}$ lorsque t tend vers $+\infty$.

7. Montrer qu'il existe un réel t_0 tel que, pour $t \geq t_0$: $0 < \frac{1}{t^h(\ln(t))^\beta} < 1$.

8. On pose dans ce qui suit $\alpha = 1 + 2h$. Dédurre de la question précédente que, pour $t \geq t_0$:

$$0 < \frac{1}{t^\alpha(\ln(t))^\beta} < \frac{1}{t^{1+h}}.$$

9. L'intégrale $\int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(\ln(t))^\beta} dt$ est-elle convergente ?

10. Que peut-on en déduire pour la nature de la série $\left(\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta} \right)$?

Partie III

On considère la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ définie par : $v_n = 1 - \frac{(\ln(n+1))^2}{\ln(n)\ln(n+2)}$.

11. La suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

12. Vérifier que, pour tout entier $n \geq 2$,

$$v_n = 1 - \frac{\left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)^2}{1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)}{\ln(n)}},$$

13. Déterminer un réel a tel que, lorsque n tend vers $+\infty$: $\left| v_n - \frac{a}{n^2 \ln(n)} \right| \leq \frac{b}{n^2(\ln(n))^2}$. où b est un réel positif que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Que peut-on en déduire pour la série $\left(\sum_{n \geq 2} v_n \right)$?

Les séries de terme général $\frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta}$ sont appelées **Séries de Bertrand** (la série harmonique $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \right)$ est un cas particulier). Elles ont de nombreuses applications en mécanique statistique.